На правах рукописи

СОЛОВЬЁВ Сергей Иванович

ПРИБЛИЖЁННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

01.01.07 – вычислительная математика

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

КАЗАНЬ – 2010

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Андреев Владимир Борисович

доктор физико-математических наук,
доцент Желтухин Виктор Семёнович

доктор физико-математических наук,
профессор Рябов Виктор Михайлович

Ведущая организация Институт математики и механики
Уральского отделения Российской
академии наук, г. Екатеринбург

Защита состоится 28 октября 2010 года в 14 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.21 в Казанском федеральном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлёвская 18, корпус 2, ауд. 217.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке имени Н.И. Лобачевского Казанского федерального университета.

Автореферат разослан 27 сентября 2010 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор О.А. Задворнов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований. Диссертация посвящена разработке приближенных методов для решения прикладных задач на собственные значения. В качестве приложений рассматривается класс задач, описывающих собственные колебания механических систем с массами. Такие задачи издавна интересовали исследователей. Еще Пуассон в своих мемуарах изучал задачу о движении груза, подвешенного на тонкой упругой нити. Подобные задачи возникают в теории индикатора паровой машины, в теории измерительных приборов, при исследовании крутильных колебаний вала с маховиком на конце и разного рода "дрожащих" клапанов. Особую актуальность задачи этого типа приобрели в связи с изучением устойчивости вибраций крыльев самолета. Для решения этой задачи необходимо вычисление собственных частот крыла с присоединенными моторами. Простейшая модель крыла – балка переменного сечения с массами. Более точная модель крыла приводит к исследованию собственных колебаний нагруженной пластины. С развитием судостроения, самолетостроения, космической техники, химической и нефтяной промышленности возникла потребность расчета оболочечных конструкций, нагруженных присоединенными элементами: приборами, моторами, элементами автоматики, узлами машин. Хотя присоединенные элементы имеют малые размеры, их влияние на устойчивость системы является определяющим.

При учете упругости закрепления масс задача сильно усложняется возникновением нелинейности по спектральному параметру. Известен метод решения задачи с помощью характеристического уравнения, содержащего разложение функции Грина по собственным функциям несущей конструкции. Такой метод является достаточно простым и эффективным, если известны аналитические формулы для собственных значений и собственных функций несущей конструкции. Но это, к сожалению, возможно только для весьма ограниченного класса механических систем. Данный класс задач определяется возможностью разделения переменных в уравнениях, что накладывает ограничения на область, вид коэффициентов и граничных условий.

В настоящей диссертации предлагается и обосновывается подход, свободный от перечисленных ограничений. Этот подход опирается на формулировку исходной задачи как задачи на собственные значения, монотонно зависящей от спектрального параметра, с последующим применением сеточных методов.

Цель работы. Целью настоящей работы является теоретическое исследование разрешимости нелинейных задач на собственные значения, разработка и обоснование приближенных методов их решения.

Методика исследования. Проведенные исследования опираются на спектральную теорию в гильбертовом пространстве, теорию аппроксимации в гильбертовом пространстве, теорию обобщенных решений дифференциальных задач, теорию пространств Соболева, теорию метода конечных элементов и теорию квадратурных формул.

Научная новизна. Предложенный и разработанный в диссертации подход для нахождения собственных колебаний механических конструкций с упруго присоединенными массами, обладает желаемой универсальностью, работает в самых общих ситуациях, возникающих на практике, и приводит в итоге к численным алгоритмам, имеющим вычислительные затраты такие же, как и в случае задач без масс.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты могут быть применены при решении широкого круга нелинейных задач на собственные значения, возникающих в науке и технике. Такие задачи возникают в теории диэлектрических волноводов, физике плазмы, квантовой механике, гидродинамике и теории упругости.

Основные результаты диссертации.

1. Установлено существование решений нелинейных задач на собственные значения в гильбертовом пространстве.

2. Доказана сходимость и получены оценки погрешности прибли-

женных методов для нелинейных задач на собственные значения в гильбертовом пространстве.

3. Исследована сходимость и погрешность метода конечных элементов для дифференциальных задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра.

4. Разработан и обоснован метод бисекции решения нелинейных спектральных задач.

5. Предложен метод итерации подпространства решения нелинейных спектральных задач, доказана сходимость и получены оценки погрешности.

6. Разработаны прямые экономичные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов.

Апробация работы. Результаты диссертации были представлены, докладывались и обсуждались на научных семинарах кафедры вычислительной математики Казанского университета (1983–2010 гг.), на итоговых научных конференциях Казанского университета (1983–2010 гг.), на научном семинаре Тартуского университета (1990 г.), на научных семинарах Технического университета Кемниц, ФРГ (1999–2003 гг.), на научном семинаре Технического университета Штутгарт, ФРГ (1999 г.), на Всесоюзной школе молодых ученых "Вычислительные методы и математическое моделирование" (Минск, 1984 г.), на Всесоюзной школе-семинаре "Математическое моделирование в науке и технике" (Пермь, 1986 г.), на Республиканской конференции молодых ученых и специалистов "Применение информатики и вычислительной техники при решении народнохозяйственных задач" (Минск, 1989 г.), на Второй Всесоюзной конференции "Современные проблемы численного анализа" (Тбилиси, 1989 г.), на конференции "Математическое моделирование и вычислительный эксперимент" (Казань, 1991 г.), на международной научной конференции "Алгебра и анализ", посвященной 100-летию со дня рождения Н.Г. Чеботарева (Казань, 1994 г.), на международной научной конференции "Optimization of Finite Element Approximations" (Санкт-Петербург, 1995 г.), на Всероссийском семинаре "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач" (Казань, 1996 г.), на научной школе-конференции "Алгебра и анализ", посвященной 100-летию со дня рождения Б.М. Гагаева (Казань, 1997 г.), на Втором Всероссийском семинаре "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач" (Казань, 1998 г.), на Молодежной научной школе-конференции "Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах" (Казань, Юдино, 2000 г.), на Третьем Всероссийском семинаре "Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач" (Казань, 2000 г.), на Третьей Всероссийской научной internet-конференции "Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках" (Тамбов, 2001 г.), на научной конференции Фонда Гумбольдта (Кемниц, ФРГ, 2003 г.), на Седьмой международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, её приложения и смежные вопросы" (Казань, 2005 г.), на Шестом Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения" (Казань, 2005 г.), на Седьмом Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения" (Казань, 2007 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 50 работах, из которых 16 работ [2,7,9,10,13–17,22,27,32,34–36,49] опубликованы в журналах, входящих в Перечень Высшей аттестационной комиссии Министерства образования и науки Российской Федерации. Результаты совместных работ принадлежат авторам в равной мере.

Объём и структура работы. Диссертация изложена на 262 страницах и состоит из введения, четырёх глав, приложения, включающего 10 рисунков, и списка литературы, содержащего 226 наименований.

Работа поддержана грантами Казанского государственного уни-

верситета, Фондом республики Татарстан "Интеллект XXI века", Немецким научно-исследовательским обществом (Deutsche Forschungsgemeinschaft), Фондом Гумбольдта (Alexander von Humboldt–Stiftung).

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы исследований, сформулирована цель работы, дан обзор примыкающих по тематике работ, изложено краткое содержание диссертации и сформулированы основные результаты диссертации.

В **первой главе** исследуется разрешимость нелинейных задач на собственные значения в гильбертовом пространстве.

Параграф 1.1 носит вспомогательный характер. Здесь сформулирована линейная вариационная задача на собственные значения в гильбертовом пространстве, приведены известные результаты о существовании собственных значений и собственных элементов, минимаксные характеризации собственных значений и теорема сравнения. Эти результаты применяются далее при исследовании нелинейных задач на собственные значения.

В § 1.2 изучается нелинейная задача на собственные значения в гильбертовом пространстве. Пусть V – вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|.\|$, $\mathbb{R}$ – числовая прямая, $\Lambda = (\nu_1, \nu_2)$, $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 \leqslant \infty$. Введем симметричные билинейные формы $a(\mu) = a(\mu, ., .) : V \times V \to \mathbb{R}$ и $b(\mu) = b(\mu, ., .) : V \times V \to \mathbb{R}$, непрерывно зависящие от $\mu \in \Lambda$. Предположим, что для фиксированного $\mu \in \Lambda$ билинейная форма $a(\mu, ., .)$ является положительно определенной и ограниченной, а билинейная форма $b(\mu, ., .)$ является положительной и вполне непрерывной. Предположим, что функционал Рэлея

$$R(\mu, v) = \frac{a(\mu, v, v)}{b(\mu, v, v)}, \quad v \in V \setminus \{0\}, \mu \in \Lambda$$

является невозрастающей по числовому аргументу функцией.

Сформулируем нелинейную задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \Lambda$, $u \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\lambda, u, v) = \lambda b(\lambda, u, v) \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

Для исследования разрешимости этой задачи введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения при фиксированном $\mu \in \Lambda$: найти $\gamma = \gamma(\mu) \in \mathbb{R}$, $y = y(\mu) \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(\mu, y, v) = \gamma b(\mu, y, v) \quad \forall v \in V. \tag{2}$$

Задача (2) имеет последовательность положительных конечнократных собственных значений $\gamma_k = \gamma_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_k \leqslant \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \gamma_k = \infty.$$

Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных элементов $y_k = y_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$ такая, что $a(\mu, y_i, y_j) = \gamma_i \delta_{ij}$, $b(\mu, y_i, y_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots$ Элементы y_k, $k = 1, 2, \ldots$ образуют полную систему в пространстве V. Справедливо соотношение $\gamma_k(\mu) \geqslant \gamma_k(\eta)$ при $\mu < \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$.

Установлены следующие результаты существования решений задачи (1). Пусть $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\gamma_i(\nu_j) = \lim_{\mu\to\nu_j} \gamma_i(\mu), \quad j = 1, 2, i = 1, 2, \ldots,$$

$$m = \min\{i : \nu_1 - \gamma_i(\nu_1) < 0, i \geqslant 1\},$$

$$n = \max\{i : \nu_2 - \gamma_i(\nu_2) > 0, i \geqslant 0\}.$$

Тогда задача (1) имеет конечную последовательность положительных собственных значений λ_k, $k = m, m+1, \ldots, n$, занумерованных с учетом кратности:

$$\nu_1 < \lambda_m \leqslant \lambda_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n < \nu_2.$$

Пусть $\nu_1 \geqslant 0$, $\nu_2 = \infty$, $m \geqslant 1$,

$$m = \min\{i : \nu_1 - \gamma_i(\nu_1) < 0, i \geqslant 1\}.$$

Тогда задача (1) имеет последовательность конечнократных положительных собственных значений λ_k, $k = m, m+1, \ldots$, занумерованных с учетом кратности:

$$\nu_1 < \lambda_m \leqslant \lambda_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_k \leqslant \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} \lambda_k = \infty.$$

Каждое собственное значение λ_i является единственным корнем уравнения

$$\mu - \gamma_i(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda.$$

Собственное подпространство $U(\lambda_i)$ задачи (1) является собственным подпространством $Y(\mu)$, соответствующим собственному значению $\gamma_i(\mu)$ линейной задачи на собственные значения (2) для $\mu = \lambda_i$.

В § 1.3 рассматривается рациональная задача на собственные значения в гильбертовом пространстве. Пусть V – вещественное бесконечномерное гильбертово пространство с нормой $\|.\|$, $\mathbb{R}$ – числовая прямая. Введем симметричные билинейные формы $a : V \times V \to \mathbb{R}$ и $b : V \times V \to \mathbb{R}$. Предположим, что билинейная форма $a(.,.)$ является положительно определенной и ограниченной, а билинейная форма $b(.,.)$ является положительной и вполне непрерывной.

Пусть σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ – заданные вещественные числа такие, что

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_m < \infty.$$

Определим неотрицательные симметричные билинейные формы $c_i : V \times V \to \mathbb{R}$, $c_i(v, v) \geqslant 0$ для $v \in V$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Предположим, что $r_i = \operatorname{codim} \ker c_i < \infty$ для $i = 1, 2, \ldots, m$, где $\ker c_i = \{v : v \in V, c_i(v, v) = 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Сформулируем рациональную задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a(u, v) = \lambda b(u, v) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda}{\sigma_i - \lambda} c_i(u, v) \quad \forall v \in V. \tag{3}$$

Обозначим $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_{m+1} = \infty$. Определим $\Lambda_n = (\sigma_{n-1}, \sigma_n)$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ и введем билинейные формы $a_n\langle\mu, ., .\rangle$, $b_n\langle\mu, ., .\rangle$, $a_n(\mu, ., .)$, $b_n(\mu, ., .)$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ и $a_n[., .]$, $b_n[., .]$, $1 \leqslant n \leqslant m$:

$$a_n\langle\mu, u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu}{\mu - \sigma_i} c_i(u, v),$$

$$b_n\langle\mu, u, v\rangle = \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{\sigma_i - \mu} c_i(u, v),$$

$$a_n(\mu, u, v) = a(u, v) + a_n\langle\mu, u, v\rangle,$$

$$b_n(\mu, u, v) = b(u, v) + b_n\langle\mu, u, v\rangle,$$

$$a_n[u, v] = a(u, v) + a_n\langle\sigma_n, u, v\rangle,$$

$$b_n[u, v] = b(u, v) + b_{n+1}\langle\sigma_n, u, v\rangle,$$

при $\mu \in \Lambda_n$.

Запишем задачу (3) для интервала Λ_n, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ в виде: найти $\lambda \in \Lambda_n$, $u \in V \setminus \{0\}$ такие, что

$$a_n(\lambda, u, v) = \lambda b_n(\lambda, u, v) \quad \forall v \in V. \tag{4}$$

Введем следующие вспомогательные линейные задачи на собственные значения: при фиксированном $\mu \in \Lambda_n$ найти $\varphi^{(n)}(\mu) \in \mathbb{R}$, $u \in V \setminus \{0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ такие, что

$$a_n(\mu, u, v) = \varphi^{(n)}(\mu) b_n(\mu, u, v) \quad \forall v \in V; \tag{5}$$

найти $\lambda^{(n)} \in \mathbb{R}$, $u \in V_n \setminus \{0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m$ такие, что

$$a_n[u, v] = \lambda^{(n)} b_n[u, v] \quad \forall v \in V_n. \tag{6}$$

Задача (5) имеет последовательность положительных конечнократных собственных значений $\varphi_i^{(n)}(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \varphi_1^{(n)}(\mu) \leqslant \varphi_2^{(n)}(\mu) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_i^{(n)}(\mu) \leqslant \ldots, \quad \lim_{i\to\infty} \varphi_i^{(n)}(\mu) = \infty.$$

Соответствующие собственные элементы $u_i^{(n)}(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют полную систему в пространстве V.

Задача (6) имеет последовательность положительных конечнократных собственных значений $\lambda_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_i^{(n)} \leqslant \ldots, \quad \lim_{i\to\infty} \lambda_i^{(n)} = \infty.$$

Соответствующие собственные элементы $v_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots$, образуют полную систему в пространстве V_n.

Исследование существования решений рациональной задачи (3) основано на применении следующих свойств функций $\varphi_k^{(n)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots$

1) Функции $\varphi_k^{(n)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots$ являются непрерывными невозрастающими функциями.

2) $\varphi_k^{(n)}(\mu) \to 0$ при $\mu \to \sigma_n^-$, $k = 1, 2, \ldots, r_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$.

3) $\varphi_{k+r}^{(n)}(\mu) \to \lambda_k^{(n)}$ при $\mu \to \sigma_n^-$, $r = r_n$, $k = 1, 2, \ldots$, $1 \leqslant n \leqslant m$.

4) $\varphi_k^{(n)}(\mu) \to \lambda_k^{(n-1)}$ при $\mu \to \sigma_{n-1}^+$, $k = 1, 2, \ldots$, $2 \leqslant n \leqslant m + 1$.

Положим $r_0 = 0$, $r_{m+1} = 0$, $M_i = r_0 + r_1 + \ldots + r_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, $\Lambda = (0, \infty)$, $\overline{\Lambda} = [0, \infty]$. Определим функции $\gamma_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots$ по формулам

$$\gamma_k(\mu) = \varphi_i^{(n)}(\mu), \quad \mu \in \Lambda_n, \quad k = M_{n-1} + i, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\gamma_j(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda_n, \quad j = 1, 2, \ldots, M_{n-1}$$

для $1 \leqslant n \leqslant m + 1$.

Из свойств функций $\varphi_k^{(n)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots$ вытекает, что функции $\gamma_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda$, $i = 1, 2, \ldots$ являются непрерывными невозрастающими функциями. Следовательно, число $\lambda \in \Lambda$ является собственным значением задачи (3) тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Lambda$ есть решение одного из уравнений $\mu - \gamma_k(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$, $k = 1, 2, \ldots$

Доказано, что задача на собственные значения (3) имеет последовательность конечнократных собственных значений λ_i, $i = 1, 2, \ldots$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_i \leqslant \ldots, \quad \lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty.$$

Каждое собственное значение λ_i, $i \geqslant 1$ является единственным корнем уравнения

$$\mu - \gamma_i(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda, \quad i \geqslant 1.$$

Соотношения

$$\lambda_{l-s-1} < \lambda_{l-s} = \ldots = \lambda_l = \sigma_n < \lambda_{l+1}$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$\lambda^{(n)}_{j-s-1} < \lambda^{(n)}_{j-s} = \ldots = \lambda^{(n)}_j = \sigma_n < \lambda^{(n)}_{j+1}$$

для $l = M_{n-1} + i$, $i = j + r_n$. Собственное подпространство $U(\lambda_k)$ задачи (3) является

a) собственным подпространством, соответствующим собственному значению $\varphi^{(n)}_i(\mu)$ линейной задачи на собственные значения (5) для $\mu = \lambda_k$, если $\lambda_k \in \Lambda_n$, $k = M_{n-1} + i$,

b) собственным подпространством, соответствующим собственному значению $\lambda^{(n)}_j$ линейной задачи на собственные значения (6), если $\lambda^{(n)}_j = \lambda_l = \sigma_n$, $l = M_{n-1} + i$, $i = j + r_n$.

Пусть $N(0) = 0$, $N(\infty) = \infty$, $N(\beta) = \max\{i : \gamma_i(\beta) \leqslant \beta, i \geqslant 0\}$, $\beta \in \Lambda$, $\gamma_0(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$. Тогда число собственных значений $N(\alpha, \beta)$ задачи (3) на полуинтервале $(\alpha, \beta]$ определяется по формуле $N(\alpha, \beta) = N(\beta) - N(\alpha)$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\Lambda}$. Имеют место соотношения $0 \leqslant N(\alpha, \beta) \leqslant \infty$, $N(0, \beta) = N(\beta)$, $N(\beta) \geqslant M_i$ для $i = I(\beta)$, $I(\beta) = \max\{i : \sigma_i \leqslant \beta, i \geqslant 0\}$. Если $0 < N(\alpha, \beta) < \infty$, то выполняются неравенства

$$\alpha < \lambda_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i_2} \leqslant \beta,$$

где $i_1 = N(\alpha) + 1$, $i_2 = N(\beta)$.

Пусть $N_0 = 0$, $N_{m+1} = \infty$, $N_n = \max\{i : \lambda^{(n)}_i \leqslant \sigma_n, i \geqslant 0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m$, где $\lambda^{(n)}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ – собственные значения задачи (6),

$\lambda_0^{(n)} = 0$. Тогда $N(\sigma_i) = N_i + M_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $N(\sigma_i, \sigma_j) = (N_j - N_i) + (M_j - M_i)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m+1$. Если $0 < N(\alpha, \beta) < \infty$, то справедливы неравенства

$$\sigma_i < \lambda_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i_2} \leqslant \sigma_j,$$

где $i_1 = M_i + N_i + 1$, $i_2 = M_j + N_j$.

Во **второй главе** изучаются конечномерные аппроксимации нелинейных задач на собственные значения в гильбертовом пространстве.

В § 2.1 исследуется аппроксимация линейной задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве. Эта задача приближается задачей в конечномерном подпространстве. Получены результаты о сходимости и погрешности приближенных решений. Результаты данного параграфа применяются далее при исследовании приближенных методов для нелинейных задач на собственные значения.

В § 2.2 рассматривается аппроксимация нелинейной задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве (1).

Для аппроксимации задачи (1) зададим конечномерные подпространства V_h пространства V размерности N_h, удовлетворяющие условию предельной плотности, то есть для любого элемента v из пространства V

$$\varepsilon_h(v) = \inf_{v^h \in V_h} \|v - v^h\| \to 0$$

при $h \to 0$.

Определим симметричные билинейные формы $a_h(\mu) = a_h(\mu, ., .) : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$ и $b_h(\mu) = b_h(\mu, ., .) : V_h \times V_h \to \mathbb{R}$, непрерывно зависящие от $\mu \in \Lambda$. Предположим, что $b_h(\mu, v^h, v^h) > 0$ для любых $v^h \in V_h \setminus \{0\}$ и выполнено условие аппроксимации для приближенных билинейных форм, то есть $\delta_0^h(\mu) \to 0$ при $h \to 0$, где

$$\delta_0^h(\mu) = \|(a_h(\mu) - a(\mu))|_{V_h \times V_h}\| + \|(b_h(\mu) - b(\mu))|_{V_h \times V_h}\|.$$

Предположим, что отношение Рэлея

$$R_h(\mu, v^h) = \frac{a_h(\mu, v^h, v^h)}{b_h(\mu, v^h, v^h)}, \quad v^h \in V_h \setminus \{0\}, \mu \in \Lambda$$

является невозрастающей по числовому аргументу функцией.

Нелинейную задачу на собственные значения (1) будем аппроксимировать конечномерной задачей: найти $\lambda^h \in \Lambda$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a_h(\lambda^h, u^h, v^h) = \lambda^h b_h(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{7}$$

Введем вспомогательную линейную задачу на собственные значения при фиксированном $\mu \in \Lambda$: найти $\gamma^h = \gamma^h(\mu) \in \mathbb{R}$, $y^h = y^h(\mu) \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a_h(\mu, y^h, v^h) = \gamma^h b_h(\mu, y^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{8}$$

Задача (8) имеет N_h положительных конечнократных собственных значений $\gamma_k^h = \gamma_k^h(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \gamma_1^h \leqslant \gamma_2^h \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{N_h}^h.$$

Этим собственным значениям соответствует ортонормированная система собственных элементов $y_k^h = y_k^h(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$ такая, что $a_h(\mu, y_i^h, y_j^h) = \gamma_i^h \delta_{ij}$, $b_h(\mu, y_i^h, y_j^h) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N_h$. Элементы y_k^h, $k = 1, 2, \ldots, N_h$ образуют полную систему в пространстве V_h. Имеют место неравенства $\gamma_k^h(\mu) \geqslant \gamma_k^h(\eta)$ при $\mu < \eta$, $\mu, \eta \in \Lambda$.

Пусть $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\gamma_i^h(\nu_j) = \lim_{\mu \to \nu_j} \gamma_i^h(\mu), \quad j = 1, 2, i = 1, 2, \ldots, N_h,$$

$$m = \min\{i : \nu_1 - \gamma_i^h(\nu_1) < 0, i \geqslant 1\},$$

$$n = \max\{i : \nu_2 - \gamma_i^h(\nu_2) > 0, i \geqslant 0\}.$$

Тогда задача (7) имеет конечную последовательность положительных собственных значений λ_k^h, $k = m, m+1, \ldots, n$, занумерованных с учетом кратности:

$$\nu_1 < \lambda_m^h \leqslant \lambda_{m+1}^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n^h < \nu_2.$$

Пусть $\nu_1 \geqslant 0$, $\nu_2 = \infty$, $m \geqslant 1$,

$$m = \min\{i : \nu_1 - \gamma_i^h(\nu_1) < 0, i \geqslant 1\}.$$

Тогда задача (7) имеет последовательность конечнократных положительных собственных значений λ_k^h, $k = m, m+1, \ldots, N_h$, занумерованных с учетом кратности:

$$\nu_1 < \lambda_m^h \leqslant \lambda_{m+1}^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{N_h}^h.$$

Каждое собственное значение λ_i^h является единственным корнем уравнения

$$\mu - \gamma_i^h(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda.$$

Собственное подпространство $U_h(\lambda_i^h)$ задачи (7) является собственным подпространством $Y_h(\mu)$, соответствующим собственному значению $\gamma_i^h(\mu)$ линейной задачи на собственные значения (8) для $\mu = \lambda_i^h$.

Установлены следующие результаты о сходимости и погрешности приближенной схемы (7).

Пусть λ_k^h – собственное значение приближенной схемы (7), u_k^h – отвечающий λ_k^h собственный элемент такой, что $b_h(\lambda_k^h, u_k^h, u_k^h) = 1$. Тогда имеет место сходимость $\lambda_k^h \to \lambda_k$ при $h \to 0$, из каждой последовательности $h' \to 0$ можно выбрать подпоследовательность $h'' \to 0$ такую, что $u_k^h \to u_k$ в V при $h = h'' \to 0$, где λ_k и u_k – собственное значение и собственный элемент задачи (1). Если λ_k – простое собственное значение и знаки собственных элементов u_k^h выбраны так, что $b_h(\lambda_k^h, u_k^h, P_h u_k) > 0$, то $u_k^h \to u_k$ в V при $h \to 0$.

Пусть λ_k – собственное значение задачи (1) кратности s, $U = U(\lambda_k)$ – собственное подпространство, отвечающее λ_k, $\dim U = s$. Положим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^h &= \sup_{u\in U,\|u\|=1} \varepsilon_h(u),\\
\delta_1^h &= \|(a_h(\lambda_k)-a(\lambda_k))|_{P_hU\times V_h}\| + \|(b_h(\lambda_k)-b(\lambda_k))|_{P_hU\times V_h}\|,\\
\delta_2^h &= \|(a_h(\lambda_k)-a(\lambda_k))|_{P_hU\times P_hU}\| + \|(b_h(\lambda_k)-b(\lambda_k))|_{P_hU\times P_hU}\|,\\
\delta_3^h &= \|(a_h(\lambda_k)-a_h(\lambda_k^h))|_{V_h\times V_h}\| + \|(b_h(\lambda_k)-b_h(\lambda_k^h))|_{V_h\times V_h}\|.
\end{aligned}$$

Для достаточно малых h справедлива оценка погрешности

$$|\lambda_k^h-\lambda_k| \leqslant c[\delta_2^h+(\varepsilon^h+\delta_1^h)^2],$$

где c – постоянная, не зависящая от h.

Пусть u_k^h – собственный элемент приближенной схемы (7) при $\|u_k^h\|=1$. Тогда найдется собственный элемент $u(u_k^h)\in U$ задачи (1) такой, что для достаточно малых h справедлива оценка погрешности

$$\|u_k^h-u\| \leqslant c(\varepsilon^h+\delta_1^h+\delta_3^h),$$

где c – постоянная, не зависящая от h.

В § 2.3 исследуется аппроксимация рациональной задачи на собственные значения в гильбертовом пространстве (3).

Для аппроксимации задачи (3) зададим конечномерные подпространства V_h пространства V размерности N_h, удовлетворяющие условию предельной плотности.

Определим отображения $a_h : V_h\times V_h \to \mathbb{R}$ и $b_h : V_h\times V_h \to \mathbb{R}$, которые являются симметричными билинейными формами $a_h(.,.)$ и $b_h(.,.)$. Предположим, что $b_h(v^h,v^h) > 0$ для любого $v^h\in V_h\setminus\{0\}$ и выполнено условие аппроксимации для приближенных билинейных форм, то есть $\delta_0^h\to 0$ при $h\to 0$, где

$$\delta_0^h = \|(a_h-a)|_{V_h\times V_h}\| + \|(b_h-b)|_{V_h\times V_h}\|.$$

Рациональную задачу на собственные значения (3) будем аппроксимировать конечномерной задачей: найти $\lambda^h\in\mathbb{R}$, $u^h\in V_h\setminus\{0\}$

такие, что

$$a_h(u^h, v^h) = \lambda^h b_h(u^h, v^h) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda^h}{\sigma_i - \lambda^h} c_i(u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{9}$$

Определим билинейные формы $a_{hn}(\mu, ., .)$, $b_{hn}(\mu, ., .)$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ и $a_{hn}[., .]$, $b_{hn}[., .]$, $1 \leqslant n \leqslant m$:

$$a_{hn}(\mu, u^h, v^h) = a_h(u^h, v^h) + a_n\langle \mu, u^h, v^h\rangle,$$

$$b_{hn}(\mu, u^h, v^h) = b_h(u^h, v^h) + b_n\langle \mu, u^h, v^h\rangle,$$

$$a_{hn}[u^h, v^h] = a_h(u^h, v^h) + a_n\langle \sigma_n, u^h, v^h\rangle,$$

$$b_{hn}[u^h, v^h] = b_h(u^h, v^h) + b_{n+1}\langle \sigma_n, u^h, v^h\rangle,$$

при $\mu \in \Lambda_n$, $u^h, v^h \in V_h$.

Обозначим $V_{hn} = \ker c_n \cap V_h$, $1 \leqslant n \leqslant m$.

Запишем задачу (9) для интервала Λ_n, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ в виде: найти $\lambda^h \in \Lambda_n$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$ такие, что

$$a_{hn}(\lambda^h, u^h, v^h) = \lambda^h b_{hn}(\lambda^h, u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h. \tag{10}$$

Введем следующие вспомогательные линейные задачи на собственные значения: при фиксированном $\mu \in \Lambda_n$ найти $\varphi^{(hn)}(\mu) \in \mathbb{R}$, $u^h \in V_h \setminus \{0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ такие, что

$$a_{hn}(\mu, u^h, v^h) = \varphi^{(hn)}(\mu) b_{hn}(\mu, u^h, v^h) \quad \forall v^h \in V_h; \tag{11}$$

найти $\lambda^{(hn)} \in \mathbb{R}$, $u^h \in V_{hn} \setminus \{0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m$ такие, что

$$a_{hn}[u^h, v^h] = \lambda^{(hn)} b_{hn}[u^h, v^h] \quad \forall v^h \in V_{hn}. \tag{12}$$

Задача (11) имеет N_h положительных конечнократных собственных значений $\varphi_i^{(hn)}(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, N_h$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \varphi_1^{(hn)}(\mu) \leqslant \varphi_2^{(hn)}(\mu) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_{N_h}^{(hn)}(\mu).$$

Соответствующие собственные элементы $u_i^{(hn)}(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, N_h$, образуют полную систему в пространстве V_h.

Задача (12) имеет $N_h - r_n$ положительных конечнократных собственных значений $\lambda_i^{(hn)}$, $i = 1, 2, \ldots, N_h - r_n$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \lambda_1^{(hn)} \leqslant \lambda_2^{(hn)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{N_h - r_n}^{(hn)}.$$

Соответствующие собственные элементы $v_i^{(hn)}$, $i = 1, 2, \ldots, N_h - r_n$, образуют полную систему в пространстве V_{hn}.

Исследование существования решений рациональной задачи (9) основано на применении следующих свойств функций $\varphi_k^{(hn)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$.

1) Функции $\varphi_k^{(hn)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$ являются непрерывными невозрастающими функциями.

2) $\varphi_k^{(hn)}(\mu) \to 0$ при $\mu \to \sigma_n^-$, $k = 1, 2, \ldots, r_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$.

3) $\varphi_k^{(hn)}(\mu) \to \infty$ при $\mu \to \sigma_{n-1}^+$, $k = N_h - r_{n-1} + 1, \ldots, N_h$, $2 \leqslant n \leqslant m + 1$.

4) $\varphi_{k+r}^{(hn)}(\mu) \to \lambda_k^{(hn)}$ при $\mu \to \sigma_n^-$, $r = r_n$, $k = 1, 2, \ldots, N_h - r_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$.

5) $\varphi_k^{(hn)}(\mu) \to \lambda_k^{(h,n-1)}$ при $\mu \to \sigma_{n-1}^+$, $k = 1, 2, \ldots, N_h - r_{n-1}$, $2 \leqslant n \leqslant m + 1$.

Положим $r_0 = 0$, $r_{m+1} = 0$, $M_i = r_0 + r_1 + \ldots + r_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, $M = M_m$, $\Lambda = (0, \infty)$, $\overline{\Lambda} = [0, \infty]$. Определим функции $\gamma_i^h(\mu)$, $\mu \in \Lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N_h + M$ по формулам

$$\gamma_k^h(\mu) = \varphi_i^{(hn)}(\mu), \quad \mu \in \Lambda_n, \quad k = M_{n-1} + i, \quad i = 1, 2, \ldots, N_h,$$

$$\gamma_j^h(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda_n, \quad j = 1, 2, \ldots, M_{n-1},$$

$$\Lambda^{(i)} = \Lambda, \quad i = 1, 2, \ldots, N_h,$$

$$\Lambda^{(i)} = (\sigma_j, \infty), \quad i = N_h + M_{j-1} + p, p = 1, 2, \ldots, r_j, j = 1, 2, \ldots, m$$

для $1 \leqslant n \leqslant m + 1$.

Из свойств функций $\varphi_k^{(hn)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots, N_h$ вытекает, что функции $\gamma_i^h(\mu)$, $\mu \in \Lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N_h + M$ являются непрерывными невозрастающими функциями. Следовательно, число $\lambda^h \in \Lambda$ является собственным значением задачи (9) тогда и только тогда, когда $\lambda^h \in \Lambda$ есть решение одного из уравнений $\mu - \gamma_k^h(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N_h + M$.

Доказано, что задача на собственные значения (9) имеет $N_h + M$ конечнократных собственных значений λ_i^h, $i = 1, 2, \ldots, N_h + M$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \lambda_1^h \leqslant \lambda_2^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{N_h+M}^h.$$

Каждое собственное значение λ_i^h, $1 \leqslant i \leqslant N_h + M$ является единственным корнем уравнения

$$\mu - \gamma_i^h(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda^{(i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N_h + M.$$

Соотношения

$$\lambda_{l-s-1}^h < \lambda_{l-s}^h = \ldots = \lambda_l^h = \sigma_n < \lambda_{l+1}^h$$

выполняются тогда и только тогда, когда

$$\lambda_{j-s-1}^{(hn)} < \lambda_{j-s}^{(hn)} = \ldots = \lambda_j^{(hn)} = \sigma_n < \lambda_{j+1}^{(hn)}$$

для $l = M_{n-1} + i$, $i = j + r_n$. Собственное подпространство $U_h(\lambda_k^h)$ задачи (9) является

a) собственным подпространством, соответствующим собственному значению $\varphi_i^{(hn)}(\mu)$ линейной задачи на собственные значения (11) для $\mu = \lambda_k^h$, если $\lambda_k^h \in \Lambda_n$, $k = M_{n-1} + i$,

b) собственным подпространством, соответствующим собственному значению $\lambda_j^{(hn)}$ линейной задачи на собственные значения (12), если $\lambda_j^{(hn)} = \lambda_l^h = \sigma_n$, $l = M_{n-1} + i$, $i = j + r_n$.

Пусть $N(0) = 0$, $N(\infty) = N_h + M$, $N(\beta) = \max\{i : \gamma_i^h(\beta) \leqslant \beta, i \geqslant 0\}$, $\beta \in \Lambda$, $\gamma_0^h(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$. Тогда число собственных значений

$N(\alpha,\beta)$ задачи (9) на полуинтервале $(\alpha,\beta]$ определяется по формуле $N(\alpha,\beta) = N(\beta) - N(\alpha)$, $\alpha < \beta$, $\alpha,\beta \in \overline{\Lambda}$. Имеют место соотношения $0 \leqslant N(\alpha,\beta) \leqslant N_h + M$, $N(0,\beta) = N(\beta)$, $N(\beta) \geqslant M_i$ для $i = I(\beta)$, $I(\beta) = \max\{i : \sigma_i \leqslant \beta, i \geqslant 0\}$. Если $N(\alpha,\beta) > 0$, то справедливы неравенства

$$\alpha < \lambda_{i_1}^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i_2}^h \leqslant \beta,$$

где $i_1 = N(\alpha) + 1$, $i_2 = N(\beta)$.

Пусть $N_0^h = 0$, $N_{m+1}^h = N_h + M$, $N_n^h = \max\{i : \lambda_i^{(hn)} \leqslant \sigma_n, i \geqslant 0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m$, где $\lambda_i^{(hn)}$, $i = 1,2,\ldots,N_h - r_n$ – собственные значения задачи (12), $\lambda_0^{(hn)} = 0$. Тогда $N(\sigma_i) = N_i^h + M_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m+1$, $N(\sigma_i,\sigma_j) = (N_j^h - N_i^h) + (M_j - M_i)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m+1$. Если $N(\sigma_i,\sigma_j) > 0$, то выполняются неравенства

$$\sigma_i < \lambda_{i_1}^h \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i_2}^h \leqslant \sigma_j,$$

где $i_1 = N_i^h + M_i + 1$, $i_2 = N_j^h + M_j$.

Приведем полученные результаты о погрешности приближенных решений.

Пусть λ_k – собственное значение задачи (3) кратности s, $U = U(\lambda_k)$ – собственное подпространство, отвечающее λ_k, $\dim U_k = s$. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^h = \sup_{u\in U,\|u\|=1} \varepsilon_h(u),\\
&\delta_1^h = \|(a_h - a)|_{P_hU\times V_h}\| + \|(b_h - b)|_{P_hU\times V_h}\|,\\
&\delta_2^h = \|(a_h - a)|_{P_hU\times P_hU}\| + \|(b_h - b)|_{P_hU\times P_hU}\|.
\end{aligned}$$

Для достаточно малых h справедлива оценка погрешности

$$|\lambda_k^h - \lambda_k| \leqslant c[\delta_2^h + (\varepsilon^h + \delta_1^h)^2],$$

где c – постоянная, не зависящая от h.

Пусть u_k^h – собственный элемент приближенной схемы (9) при $\|u_k^h\| = 1$. Тогда найдется собственный элемент $u = (u_k^h) \in U$ задачи

(3) такой, что для достаточно малых h выполняется оценка погрешности

$$\|u_k^h - u\| \leqslant c(\varepsilon^h + \delta_1^h + \delta_2^h),$$

где c – постоянная, не зависящая от h.

В **третьей главе** разработаны итерационные методы решения матричных нелинейных задач на собственные значения.

В § 3.1 описаны хорошо известные методы решения линейной задачи на собственные значения: метод бисекции и метод итерации подпространства. Для этих методов приведены известные результаты о сходимости и погрешности, которые далее применяются при исследовании методов решения нелинейных задач на собственные значения.

В § 3.2 построены алгоритмы решения матричной нелинейной задачи на собственные значения с монотонной зависимостью от спектрального параметра. Задачи такого вида возникают при аппроксимации задач (1) и (4) с помощью приближенных схем (7) и (10).

Пусть H есть N-мерное вещественное евклидово пространство векторов со скалярным произведением $(.,.)$, $\Lambda = (\nu_1, \nu_2)$, $0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 \leqslant \infty$. Для $\mu \in \Lambda$ введем симметричные положительно определенные квадратные матрицы $A(\mu)$ и $B(\mu)$ размера N. Предположим, что элементы матриц $A(\mu)$ и $B(\mu)$ непрерывно зависят от параметра $\mu \in \Lambda$, отношение Рэлея

$$R(\mu, v) = \frac{(A(\mu)v, v)}{(B(\mu)v, v)} \quad \forall v \in H \setminus \{0\}, \mu \in \Lambda$$

является невозрастающей по числовому аргументу функцией.

Сформулируем следующую задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \Lambda$, $u \in H \setminus \{0\}$ такие, что

$$A(\lambda)u = \lambda B(\lambda)u. \tag{13}$$

При фиксированном $\mu \in \Lambda$ обозначим через $\gamma_k = \gamma_k(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots, N$ собственные значения задачи $A(\mu)y = \gamma B(\mu)y$, занумерованные с учетом кратности: $0 < \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_N$.

Обозначим

$$\gamma_i(\nu_j) = \lim_{\mu\to\nu_j} \gamma_i(\mu), \quad j = 1, 2, i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$m = \min\{i : \nu_1 - \gamma_i(\nu_1) < 0, i \geqslant 1\}.$$

Для $\nu_2 = \infty$ положим $n = N$, для $\nu_2 < \infty$ положим

$$n = \max\{i : \nu_2 - \gamma_i(\nu_2) > 0, i \geqslant 0\},$$

$m \leqslant n$.

Задача (13) имеет собственные значения λ_k, $k = m, m+1, \ldots, n$, занумерованные с учетом кратности:

$$\nu_1 < \lambda_m \leqslant \lambda_{m+1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n < \nu_2.$$

Собственное значение λ_i, $m \leqslant i \leqslant n$ является единственным корнем уравнения

$$\mu - \gamma_i(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda, m \leqslant i \leqslant n.$$

Установлен следующий результат. Пусть при фиксированном $\mu \in \Lambda$ выполняется треугольное разложение

$$A(\mu) - \mu B(\mu) = L(\mu)D(\mu)L^\top(\mu)$$

с диагональной матрицей $D(\mu)$ и нижней треугольной матрицей $L(\mu)$, имеющей единичные диагональные элементы. Тогда

$$\nu(A(\mu) - \mu B(\mu)) = m - 1 + \nu(\Delta - \mu E) = \nu(D(\mu)),$$

где E – единичная матрица размера $n - m + 1$, $\nu(C)$ – число отрицательных собственных значений матрицы C (отрицательный индекс инерции), $\Delta = \mathrm{diag}(\lambda_m, \lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n)$, λ_i, $i = m, m+1, \ldots, n$ – собственные значения матричной задачи, $1 \leqslant m \leqslant n$.

Из этого результата следует, что количество собственных значений матричной задачи, меньших $\mu \in \Lambda$, совпадает с числом $\nu(D(\mu)) - m + 1$, где $\nu(D(\mu))$ – число отрицательных элементов диагональной матрицы $D(\mu)$ указанного треугольного разложения, если это разложение существует. Для вычисления величины $\nu(D(\mu))$ следует воспользоваться методом Гаусса. В этом случае $\nu(D(\mu))$ равно числу отрицательных ведущих элементов, возникающих в процессе гауссовых исключений неизвестных системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $A(\mu) - \mu B(\mu)$, $\mu \in \Lambda$. Описанная процедура деления спектра вместе с известным приемом деления отрезка пополам позволяет локализовать с требуемой точностью любое собственное значение задачи из заданного отрезка.

Далее построен метод итерации подпространства с предобуславливанием. Предположим, что для каждого $\mu \in \Lambda$ задана квадратная симметричная положительно определенная матрица $C(\mu)$ размера N и положительные постоянные $\delta_1(\mu)$ и $\delta_2(\mu)$, для которых выполняются соотношения

$$\delta_1(\mu)(C(\mu)v, v) \leqslant (A(\mu)v, v) \leqslant \delta_2(\mu)(C(\mu)v, v) \quad \forall v \in H.$$

Для заданного μ^n определим итерационный параметр по формуле

$$\tau^n = \frac{2}{\delta_1(\mu^n) + \delta_2(\mu^n)}.$$

Зафиксируем номер k, $m \leqslant k \leqslant n$. Через $U^n = (U_1^n, U_2^n, \ldots, U_k^n)$ и $V^n = (V_1^n, V_2^n, \ldots, V_k^n)$ при $n = 0, 1, \ldots$ будем обозначать прямоугольные матрицы, состоящие из k столбцов U_1^n, U_2^n, …, U_k^n и V_1^n, V_2^n, …, V_k^n длины N соответственно, через $\operatorname{span} V^n = \operatorname{span}\{V_1^n, V_2^n, \ldots, V_k^n\}$ – линейную оболочку столбцов матрицы V^n, через Λ^n при $n = 0, 1, \ldots$ – диагональные матрицы $\Lambda^n = \operatorname{diag}(\Lambda_1^n, \Lambda_2^n, \ldots, \Lambda_k^n)$, когда диагональные элементы упорядочены по неубыванию:

$$\Lambda_1^n \leqslant \Lambda_2^n \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_k^n.$$

Зададим V^0 и вычислим Λ^0 и U^0 с помощью метода Рэлея–Ритца для исходной задачи в подпространстве $\operatorname{span} V^0$ так, что

$$(U^0)^\top A(\mu^0)U^0 = \Lambda^0, \quad (U^0)^\top B(\mu^0)U^0 = E,$$

$$\mu^0 = \Lambda_k^0, \quad u^0 = U_k^0.$$

При $n = 0, 1, \ldots$ вычисляем Λ^{n+1} и U^{n+1} по методу Рэлея–Ритца для исходной задачи в подпространстве $\operatorname{span} V^{n+1}$,

$$V^{n+1} = U^n - \tau^n C^{-1}(\mu^n)(A(\mu^n)U^n - B(\mu^n)U^n\Lambda^n),$$

$$(U^{n+1})^\top A(\mu^{n+1})U^{n+1} = \Lambda^{n+1}, \quad (U^{n+1})^\top B(\mu^{n+1})U^{n+1} = E,$$

$$\mu^{n+1} = \Lambda_k^{n+1}, \quad u^{n+1} = U_k^{n+1}.$$

Заметим, что $\mu^n = \gamma_k(\mu^n, \operatorname{span} V^n) = R(\mu^n, u^n)$ при $n = 0, 1, \ldots$, то есть приближение μ^n является собственным значением с номером k матричной задачи метода Рэлея–Ритца в подпространстве $\operatorname{span} V^n$, приближение u^n является собственным элементом, отвечающим собственному значению μ^n.

Введем функции $\varphi_n(\mu) = R(\mu, u^n)$, $\mu \in \Lambda$, $n = 0, 1, \ldots$ Отметим, что приближение μ^n определяется как решение уравнения

$$\mu^n = \varphi_n(\mu^n),$$

где $n = 0, 1, \ldots$

Доказаны следующие результаты.

Пусть $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\mu^0 < \lambda_{k+1}$. Тогда $\mu^n \to \lambda_k$ при $n \to \infty$, $\lambda_{k+1} > \mu^0 \geqslant \mu^1 \geqslant \ldots \geqslant \mu^n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k$.

Предположим, что существуют положительные числа g_1 и g_2 такие, что

$$|(A(\mu)v, v) - (A(\eta)v, v)| \leqslant g_1\,(\eta - \mu)\,(A(\mu)v, v),$$

$$|(B(\mu)v, v) - (B(\eta)v, v)| \leqslant g_2\,(\eta - \mu)\,(B(\mu)v, v)$$

для $\nu_1 < \lambda_k \leqslant \mu \leqslant \eta < \lambda_{k+1} < \nu_2$, $v \in H \setminus \{0\}$.

Пусть $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\mu^0 < \lambda_{k+1}$. Тогда справедлива оценка

$$\frac{\mu^{n+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \mu^{n+1}} \leqslant q_n\,\frac{\mu^n - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \mu^n},$$

где $n = 0, 1, \ldots$,

$$q_n = \frac{\rho_k^2 + r_0\, s_n\, \mu^n}{1 + r_0\, s_n\, \mu^n}, \quad s_n = \frac{\gamma_{k+1}(\mu^n) - \gamma_k(\mu^n)}{\gamma_{k+1}(\mu^n) - \mu^n},$$

$r_0 = g$, $g = g_1 + g_2$, $1 \leqslant s_n \leqslant s_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant s_0$, $q_n \leqslant q_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant q_0 < 1$, $s_n \to 1$ при $n \to \infty$, $q_n \to (\rho_k^2 + r_0\lambda_k)/(1 + r_0\lambda_k)$ при $n \to \infty$.

Предположим, что $g_1 = g_1(\mu, \eta)$, $g_2 = g_2(\mu, \eta)$, $g(\mu, \eta) = g_1(\mu, \eta) + g_2(\mu, \eta)$. Пусть $\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $\mu^0 < \lambda_{k+1}$. Тогда выполняется оценка

$$\frac{\mu^{n+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \mu^{n+1}} \leqslant q_n\, \frac{\mu^n - \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \mu^n},$$

где $n = 0, 1, \ldots$,

$$q_n = \frac{\rho_k^2 + r_n\, s_n\, \mu^n}{1 + r_n\, s_n\, \mu^n}, \quad s_n = \frac{\gamma_{k+1}(\mu^n) - \gamma_k(\mu^n)}{\gamma_{k+1}(\mu^n) - \mu^n},$$

$r_n = g(\mu^{n+1}, \mu^n)$, $q_n < 1$, $1 \leqslant s_n \leqslant s_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant s_0$, $s_n \to 1$ при $n \to \infty$, $q_n \to (\rho_k^2 + g_0\lambda_k)/(1 + g_0\lambda_k)$ при $n \to \infty$, $g_0 = g(\lambda_k, \lambda_k)$. Если $r_n \leqslant r_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant r_0$, то $q_n \leqslant q_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant q_0 < 1$.

Из приведенных оценок вытекают следующие результаты.

1) Если $\mu^n = \lambda_k$, то $\mu^i = \lambda_k$, $i = n, n+1, \ldots$ Если $\mu^n \neq \lambda_k$, то $\mu^{n+1} < \mu^n$.

2) Справедлива оценка

$$\mu^{n+1} - \lambda_k \leqslant \xi_k^n\, (\mu^n - \lambda_k), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где

$$\xi_k^n = q_n\, \frac{\lambda_{k+1} - \mu^{n+1}}{\lambda_{k+1} - \mu^n},$$

$\xi_k^n \to (\rho_k^2 + g_0\lambda_k)/(1 + g_0\lambda_k)$ при $n \to \infty$, $g_0 = g(\lambda_k, \lambda_k)$, существует номер n_0 такой, что $\xi_k^n < 1$ при $n \geqslant n_0$.

3) Если $r_n \leqslant r_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant r_0$, то выполняется оценка

$$\mu^n - \lambda_k \leqslant c_k (q_0)^n,$$

где $c_k = (\lambda_{k+1} - \lambda_k)\,(\mu_0 - \lambda_k)/(\lambda_{k+1} - \mu_0)$.

В § 3.3 результаты, полученные в § 3.2, применяются для построения алгоритмов метода бисекции и метода итерации подпространства решения матричной рациональной задачи на собственные значения, возникающей при аппроксимации задачи (3) с помощью приближенной схемы (9). Доказана сходимость и получены оценки погрешности предложенных методов.

Пусть H есть N-мерное вещественное евклидово пространство векторов со скалярным произведением $(.,.)$. Введем симметричные положительно определенные квадратные матрицы A и B размера N.

Пусть σ_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ – заданные вещественные числа такие, что

$$0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots < \sigma_m < \infty.$$

Зададим неотрицательно определенные симметричные квадратные матрицы C_i, $(C_i v, v) \geqslant 0$ для любого $v \in H \setminus \{0\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Предположим, что $r_i = \operatorname{codim} \ker C_i < N$ для $i = 1, 2, \ldots, m$, где $\ker C_i = \{v : v \in H, C_i v = 0\}$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Сформулируем рациональную задачу на собственные значения: найти $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in H \setminus \{0\}$ такие, что

$$Au = \lambda Bu + \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda}{\sigma_i - \lambda} C_i u. \tag{14}$$

Обозначим $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_{m+1} = \infty$. Определим $\Lambda_n = (\sigma_{n-1}, \sigma_n)$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ и введем квадратные матрицы $A_n\langle\mu\rangle$, $B_n\langle\mu\rangle$, $A_n(\mu)$, $B_n(\mu)$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ и A_n, B_n, $1 \leqslant n \leqslant m$:

$$A_n\langle\mu\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\mu}{\mu - \sigma_i} C_i,$$

$$B_n\langle\mu\rangle = \sum_{i=n}^{m} \frac{1}{\sigma_i - \mu} C_i,$$

$$A_n(\mu) = A + A_n\langle\mu\rangle,$$

$$B_n(\mu) = B + B_n\langle\mu\rangle,$$

$$A_n = A + A_n\langle\sigma_n\rangle,$$

$$B_n = B + B_{n+1}\langle\sigma_n\rangle,$$

при $\mu \in \Lambda_n$.

Обозначим $V_i = \ker C_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Запишем задачу (14) для интервала Λ_n, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ в виде: найти $\lambda \in \Lambda_n$, $u \in H \setminus \{0\}$ такие, что

$$A_n(\lambda)u = \lambda B_n(\lambda)u.$$

Введем следующие вспомогательные линейные задачи на собственные значения: при фиксированном $\mu \in \Lambda_n$ найти $\varphi^{(n)}(\mu) \in \mathbb{R}$, $u \in H \setminus \{0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m+1$ такие, что

$$A_n(\mu)u = \varphi^{(n)}(\mu)B_n(\mu)u; \tag{15}$$

найти $\lambda^{(n)} \in \mathbb{R}$, $u \in V_n \setminus \{0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m$ такие, что

$$A_n u = \lambda^{(n)} B_n u. \tag{16}$$

Задача (15) имеет N собственных значений $\varphi_i^{(n)}(\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \varphi_1^{(n)}(\mu) \leqslant \varphi_2^{(n)}(\mu) \leqslant \ldots \leqslant \varphi_N^{(n)}(\mu).$$

Задача (16) имеет $N - r_n$ собственных значений $\lambda_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, N - r_n$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \lambda_1^{(n)} \leqslant \lambda_2^{(n)} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{N-r_n}^{(n)}.$$

Перечислим свойства функций $\varphi_k^{(n)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots, N$.

1) Функции $\varphi_k^{(n)}(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots, N$ являются непрерывными невозрастающими функциями.

2) $\varphi_k^{(n)}(\mu) \to 0$ при $\mu \to \sigma_n^-$, $k = 1, 2, \ldots, r_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$.

3) $\varphi_k^{(n)}(\mu) \to \infty$ при $\mu \to \sigma_{n-1}^+$, $k = N - r_{n-1} + 1, \ldots, N$, $2 \leqslant n \leqslant m+1$.

4) $\varphi^{(n)}_{k+r}(\mu) \to \lambda^{(n)}_k$ при $\mu \to \sigma_n^-$, $r = r_n$, $k = 1, 2, \ldots, N - r_n$, $1 \leqslant n \leqslant m$.

5) $\varphi^{(n)}_k(\mu) \to \lambda^{(n-1)}_k$ при $\mu \to \sigma^+_{n-1}$, $k = 1, 2, \ldots, N - r_{n-1}$, $2 \leqslant n \leqslant m + 1$.

Положим $r_0 = 0$, $r_{m+1} = 0$, $M_i = r_0 + r_1 + \ldots + r_i$, $i = 1, 2, \ldots, m+1$, $M = M_m$, $\Lambda = (0, \infty)$, $\overline{\Lambda} = [0, \infty]$. Определим функции $\gamma_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N + M$ по формулам

$$\gamma_k(\mu) = \varphi^{(n)}_i(\mu), \quad \mu \in \Lambda_n, \quad k = M_{n-1} + i, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\gamma_j(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda_n, \quad j = 1, 2, \ldots, M_{n-1},$$

$$\Lambda^{(i)} = \Lambda, \quad i = 1, 2, \ldots, N,$$

$$\Lambda^{(i)} = (\sigma_j, \infty), \quad i = N + M_{j-1} + p, p = 1, 2, \ldots, r_j, j = 1, 2, \ldots, m$$

для $1 \leqslant n \leqslant m + 1$.

Из свойств функций $\varphi^{(n)}_k(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$, $k = 1, 2, \ldots, N$ вытекает, что функции $\gamma_i(\mu)$, $\mu \in \Lambda^{(i)}$, $i = 1, 2, \ldots, N + M$ являются непрерывными невозрастающими функциями. Следовательно, число $\lambda \in \Lambda$ является собственным значением задачи (14) тогда и только тогда, когда $\lambda \in \Lambda$ есть решение одного из уравнений $\mu - \gamma_k(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, N + M$.

Доказано, что задача на собственные значения (14) имеет $N + M$ конечнократных собственных значений λ_i, $i = 1, 2, \ldots, N + M$, занумерованных с учетом кратности:

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{N+M}.$$

Каждое собственное значение λ_i, $1 \leqslant i \leqslant N + M$ является единственным корнем уравнения

$$\mu - \gamma_i(\mu) = 0, \quad \mu \in \Lambda^{(i)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N + M.$$

Пусть $N(0) = 0$, $N(\infty) = N + M$, $N(\beta) = \max\{i : \gamma_i(\beta) \leqslant \beta, i \geqslant 0\}$, $\beta \in \Lambda$, $\gamma_0(\mu) = 0$, $\mu \in \Lambda$. Тогда число собственных значений

$N(\alpha, \beta)$ задачи (14) на полуинтервале $(\alpha, \beta]$ определяется по формуле $N(\alpha, \beta) = N(\beta) - N(\alpha)$, $\alpha < \beta$, $\alpha, \beta \in \overline{\Lambda}$. Имеют место соотношения $0 \leqslant N(\alpha, \beta) \leqslant N + M$, $N(0, \beta) = N(\beta)$, $N(\beta) \geqslant M_i$ для $i = I(\beta)$, $I(\beta) = \max\{i : \sigma_i \leqslant \beta, i \geqslant 0\}$. Если $N(\alpha, \beta) > 0$, то справедливы неравенства

$$\alpha < \lambda_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i_2} \leqslant \beta,$$

где $i_1 = N(\alpha) + 1$, $i_2 = N(\beta)$.

Пусть $N_0 = 0$, $N_{m+1} = N + M$, $N_n = \max\{i : \lambda_i^{(n)} \leqslant \sigma_n, i \geqslant 0\}$, $1 \leqslant n \leqslant m$, где $\lambda_i^{(n)}$, $i = 1, 2, \ldots, N - r_n$ – собственные значения задачи (16), $\lambda_0^{(n)} = 0$. Тогда $N(\sigma_i) = N_i + M_i$ при $1 \leqslant i \leqslant m + 1$, $N(\sigma_i, \sigma_j) = (N_j - N_i) + (M_j - M_i)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m + 1$. Если $N(\sigma_i, \sigma_j) > 0$, то выполняются неравенства

$$\sigma_i < \lambda_{i_1} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{i_2} \leqslant \sigma_j,$$

где $i_1 = N_i + M_i + 1$, $i_2 = N_j + M_j$.

Получен следующий результат. Зафиксируем номер n, $1 \leqslant n \leqslant m + 1$. Для $\mu \in \Lambda_n$ положим

$$T(\mu) = A - \mu B + \sum_{i=1}^{m} \frac{\mu}{\sigma_i - \mu} C_i.$$

Пусть при фиксированном $\mu \in \Lambda_n$ выполняется треугольное разложение

$$T(\mu) = L(\mu) D(\mu) L^{\top}(\mu)$$

с диагональной матрицей $D(\mu)$ и нижней треугольной матрицей $L(\mu)$, имеющей единичные диагональные элементы. Тогда

$$\nu(T(\mu)) = N_{n-1} + \nu(\Delta - \mu E) = \nu(D(\mu)),$$

где E – единичная матрица размера $i_2 - i_1 + 1$, $\nu(C)$ – число отрицательных собственных значений матрицы C (отрицательный индекс инерции), $\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_1+1}, \ldots, \lambda_{i_2})$, λ_i, $i = i_1, i_1 + 1, \ldots, i_2$ – собственные значения задачи (14), $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2$, $i_1 = N_{n-1} + M_{n-1} + 1$, $i_2 = N_n + M_n$.

Из этого результата вытекает, что количество собственных значений задачи (14) на Λ_n, меньших $\mu \in \Lambda_n$, равно

$$\nu(\Delta - \mu E) = \nu(D(\mu)) - N_{n-1}.$$

Поэтому количество собственных значений задачи (14), меньших $\mu \in \Lambda_n$, равно

$$i_1 - 1 + \nu(\Delta - \mu E) = \nu(D(\mu)) + M_{n-1},$$

где $\nu(D(\mu))$ – число отрицательных элементов диагональной матрицы $D(\mu)$ указанного треугольного разложения, если это разложение существует. Для вычисления величины $\nu(D(\mu))$ следует воспользоваться методом Гаусса. В этом случае $\nu(D(\mu))$ равно числу отрицательных ведущих элементов, возникающих в процессе гауссовых исключений неизвестных системы линейных алгебраических уравнений с матрицей $T(\mu)$, $\mu \in \Lambda_n$. Эта процедура деления спектра позволяет локализовать с требуемой точностью любое собственное значение задачи (14) из заданного отрезка.

Зафиксируем номер i, $1 \leqslant i \leqslant m+1$. Предположим, что задана квадратная симметричная положительно определенная матрица C размера N и положительные постоянные γ_1, γ_2, $\gamma_2^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, i-1$, для которых выполняются соотношения

$$\gamma_1(Cv, v) \leqslant (Av, v) \leqslant \gamma_2(Cv, v) \quad \forall v \in H,$$

$$(C_j v, v) \leqslant \gamma_2^{(j)}(Cv, v) \quad \forall v \in H, \quad j = 1, 2, \ldots, i-1.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\delta_1(\mu)(Cv, v) \leqslant (A_i(\mu)v, v) \leqslant \delta_2(\mu)(Cv, v) \quad \forall v \in H,$$

где

$$\delta_1(\mu) = \gamma_1, \quad \delta_2(\mu) = \gamma_2 + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\mu}{\mu - \sigma_j}\gamma_2^{(j)}, \quad \mu \in \Lambda_i.$$

Для заданного μ^n определим итерационный параметр по формуле

$$\tau^n = \frac{2}{\delta_1(\mu^n) + \delta_2(\mu^n)}.$$

Зафиксируем номер k, $N_{i-1}+1 \leqslant k \leqslant N_i + r_i$. Через $U^n = (U_1^n, U_2^n, \ldots, U_k^n)$ и $V^n = (V_1^n, V_2^n, \ldots, V_k^n)$ при $n = 0, 1, \ldots$ будем обозначать прямоугольные матрицы, состоящие из k столбцов U_1^n, U_2^n, $\ldots$, U_k^n и V_1^n, V_2^n, $\ldots$, V_k^n длины N соответственно, через $\operatorname{span} V^n = \operatorname{span}\{V_1^n, V_2^n, \ldots, V_k^n\}$ – линейную оболочку столбцов матрицы V^n, через Λ^n при $n = 0, 1, \ldots$ – диагональные матрицы $\Lambda^n = \operatorname{diag}(\Lambda_1^n, \Lambda_2^n, \ldots, \Lambda_k^n)$, когда диагональные элементы упорядочены по неубыванию:

$$\Lambda_1^n \leqslant \Lambda_2^n \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_k^n.$$

Зададим V^0 и вычислим Λ^0 и U^0 с помощью метода Рэлея–Ритца для задачи (14) в подпространстве $\operatorname{span} V^0$ так, что

$$(U^0)^\top A_i(\mu^0) U^0 = \Lambda^0, \quad (U^0)^\top B_i(\mu^0) U^0 = E,$$

$$\mu^0 = \Lambda_k^0, \quad u^0 = U_k^0.$$

При $n = 0, 1, \ldots$ вычисляем Λ^{n+1} и U^{n+1} по методу Рэлея–Ритца для задачи (14) в подпространстве $\operatorname{span} V^{n+1}$,

$$V^{n+1} = U^n - \tau^n C^{-1}(A_i(\mu^n) U^n - B_i(\mu^n) U^n \Lambda^n),$$

$$(U^{n+1})^\top A_i(\mu^{n+1}) U^{n+1} = \Lambda^{n+1}, \quad (U^{n+1})^\top B_i(\mu^{n+1}) U^{n+1} = E,$$

$$\mu^{n+1} = \Lambda_k^{n+1}, \quad u^{n+1} = U_k^{n+1}.$$

Пусть λ_l и λ_{l+1} есть собственные значения задачи (14) такие, что $\sigma_{i-1} < \lambda_l < \lambda_{l+1} < \sigma_i$, $l = M_{i-1} + k$. Положим

$$\begin{aligned}
&\rho_l = 1 - (1 - \xi_l)(1 - \lambda_l/\lambda_{l+1}), \\
&\xi_l = (1 - d_l)/(1 + d_l), \\
&d_l = \delta(\lambda_l), \quad \delta(\mu) = \delta_1(\mu)/\delta_2(\mu), \quad \mu \in \Lambda_i.
\end{aligned}$$

Заметим, что $0 < d_l \leqslant 1$, $0 < \rho_l < 1$.

Установлены следующие результаты. Пусть $\mu^0 < \lambda_{l+1}$. Тогда $\mu^n \to \lambda_l$ при $n \to \infty$, $\lambda_{l+1} > \mu^0 \geqslant \mu^1 \geqslant \ldots \geqslant \mu^n \geqslant \ldots \geqslant \lambda_l$.

Имеет место оценка

$$\frac{\mu^{n+1}-\lambda_l}{\lambda_{l+1}-\mu^{n+1}} \leqslant q_n\,\frac{\mu^n-\lambda_l}{\lambda_{l+1}-\mu^n},$$

где $n=0,1,\ldots,$

$$q_n=\frac{\rho_l^2+r_0\,s_n\,\mu^n}{1+r_0\,s_n\,\mu^n},\quad s_n=\frac{\gamma_{l+1}(\mu^n)-\gamma_l(\mu^n)}{\gamma_{l+1}(\mu^n)-\mu^n},$$

$$r_0=\frac{1}{\lambda_l-\sigma_{i-1}}+\frac{1}{\sigma_i-\lambda_{l+1}},$$

$1\leqslant s_n\leqslant s_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant s_0$, $q_n\leqslant q_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant q_0<1$, $s_n\to 1$ при $n\to\infty$, $q_n\to(\rho_l^2+r_0\lambda_l)/(1+r_0\lambda_l)$ при $n\to\infty$.

Выполняется оценка

$$\frac{\mu^{n+1}-\lambda_l}{\lambda_{l+1}-\mu^{n+1}} \leqslant q_n\,\frac{\mu^n-\lambda_l}{\lambda_{l+1}-\mu^n},$$

где $n=0,1,\ldots,$

$$q_n=\frac{\rho_l^2+r_n\,s_n\,\mu^n}{1+r_n\,s_n\,\mu^n},\quad s_n=\frac{\gamma_{l+1}(\mu^n)-\gamma_l(\mu^n)}{\gamma_{l+1}(\mu^n)-\mu^n},$$

$$r_n=\frac{1}{\mu^n-\sigma_{i-1}}+\frac{1}{\sigma_i-\mu^n},$$

$1\leqslant s_n\leqslant s_{n-1}\leqslant\ldots\leqslant s_0$, $s_n\to 1$ при $n\to\infty$, $q_n\to(\rho_l^2+g_0\lambda_l)/(1+g_0\lambda_l)$ при $n\to\infty$,

$$g_0=\frac{1}{\lambda_l-\sigma_{i-1}}+\frac{1}{\sigma_i-\lambda_{l+1}}.$$

Предположим, что $\mu^0<\lambda_{l+1}$.

1) Если $\mu^n=\lambda_l$, то $\mu^i=\lambda_l$, $i=n,n+1,\ldots$ Если $\mu^n\neq\lambda_l$, то $\mu^{n+1}<\mu^n$.

2) Справедлива оценка

$$\mu^{n+1}-\lambda_l\leqslant\xi_l^n\,(\mu^n-\lambda_l),\quad n=0,1,\ldots,$$

где $\xi_l^n\to(\rho_l^2+g_0\lambda_l)/(1+g_0\lambda_l)$ при $n\to\infty$,

$$\xi_l^n=q_n\,\frac{\lambda_{l+1}-\mu^{n+1}}{\lambda_{l+1}-\mu^n},$$

$$q_n = \frac{\rho_l^2 + r_n\, s_n\, \mu^n}{1 + r_n\, s_n\, \mu^n}, \quad s_n = \frac{\gamma_{l+1}(\mu^n) - \gamma_l(\mu^n)}{\gamma_{l+1}(\mu^n) - \mu^n},$$
$$r_n = \frac{1}{\mu^n - \sigma_{i-1}} + \frac{1}{\sigma_i - \mu^n},$$
$$g_0 = \frac{1}{\lambda_l - \sigma_{i-1}} + \frac{1}{\sigma_i - \lambda_{l+1}},$$
существует номер n_0 такой, что $\xi_l^n < 1$ при $n \geqslant n_0$.

3) Выполняется оценка

$$\mu^n - \lambda_l \leqslant c_l (q_0)^n,$$

где $c_l = (\lambda_{l+1} - \lambda_l)\,(\mu^0 - \lambda_l)/(\lambda_{l+1} - \mu^0)$,
$$q_0 = \frac{\rho_l^2 + r_0\, s_0\, \mu^0}{1 + r_0\, s_0\, \mu^0}, \quad s_0 = \frac{\gamma_{l+1}(\mu^0) - \gamma_l(\mu^0)}{\gamma_{l+1}(\mu^0) - \mu^0},$$
$$r_0 = \frac{1}{\lambda_l - \sigma_{i-1}} + \frac{1}{\sigma_i - \lambda_{l+1}}.$$

В **четвертой главе** исследуются приближенные методы решения дифференциальных задач на собственные значения.

В § 4.1 одномерная дифференциальная задача аппроксимируется схемой метода конечных элементов с численным интегрированием. Выведены оценки погрешности приближенных собственных значений и собственных функций. Аналогичные результаты установлены для двумерной дифференциальной задачи на собственные значения в прямоугольной области и ее аппроксимации по методу конечных элементов с численным интегрированием. При получении этих результатов использовались общие результаты, доказанные в § 2.1.

В § 4.2 исследованы схемы метода конечных элементов с численным интегрированием для одномерной и двумерной дифференциальных задач на собственные значения с монотонной зависимостью от спектрального параметра на основе общих результатов из § 2.2.

В § 4.3 изучаются задачи о собственных колебаниях балки и пластины с упруго присоединенными массами. Задача о балке аппроксимируется схемой метода конечных элементов с эрмитовыми кубическими элементами. Задача о квадратной пластине аппроксимируется схемой метода конечных элементов с эрмитовыми бикубическими элементами. Для исследования разрешимости этих задач и погрешности приближенных методов применяются общие результаты, полученные в § 1.3 и § 2.3.

В § 4.4 разработаны прямые экономичные алгоритмы решения систем линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов для дифференциальных задач второго и четвертого порядков. Необходимость в таких алгоритмах возникает при реализации методов итерации подпространства с предобуславливанием, изученных в третьей главе.

В **приложении** приведены результаты численных экспериментов для задач о балке и пластине из § 4.3. Эти эксперименты иллюстрируют общие теоретические результаты, полученные в § 1.3.

Публикации по теме диссертации

1. Соловьёв С.И. О спектре конечно-элементной аппроксимации задачи на собственные значения для оператора Лапласа. – ВИНИТИ, № 5516–84 Деп. – Казань: Казанский государственный университет, 1984. – 12 с.

2. Соловьёв С.И. Быстрые методы решения сеточных схем МКЭ второго порядка точности для уравнения Пуассона в прямоугольнике // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 10. – С. 71–74.

3. Соловьёв С.И. Метод Фурье для конечно-элементной аппроксимации уравнения Пуассона // Сеточные методы решения дифференциальных уравнений / Ред. А.Д. Ляшко. – Казань: Казанский государственный университет, 1986. – С. 64–78.

4. Соловьёв С.И. Быстрые методы решения сеточных схем МКЭ повышенного порядка точности // Математическое моделирование в науке и технике. Тезисы докладов Всесоюзной школы-семинара (Пермь, 9–15 июня 1986 года). – Пермь, 1986. – С. 269.

5. Жигалко Ю.П., Ляшко А.Д., Соловьёв С.И. Колебания цилиндрической оболочки с присоединёнными жёсткими кольцевыми элементами // Моделирование в механике. – 1988. – Т. 2, № 2. – С. 68–85.

6. Соловьёв С.И. Исследование точности сеточных схем МКЭ с численным интегрированием для задачи на собственные значения // Применение информатики и вычислительной техники при решении народнохозяйственных задач. Тезисы докладов Республиканской конференции молодых ученых и специалистов (Минск, 4–7 мая 1989 года). – Минск, 1989. – С. 127–128.

7. Соловьёв С.И. Быстрый прямой метод решения схем МКЭ с эрмитовыми бикубическими элементами // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 8. – С. 87–89.

8. Соловьёв С.И. Быстрые прямые методы решения сеточных схем МКЭ с бикубическими элементами для уравнения Пуассона // Исследования по прикладной математике / Ред. Р.Р. Шагидуллин. –

Казань: Казанский государственный университет, 1990. – Вып. 17. – С. 120–129.

9. Lyashko A.D., Solov′ëv S.I. Fourier method of solution of FE systems with Hermite elements for Poisson equation // Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1991. – V. 6, № 2. – 121–129.

10. Даутов Р.З., Ляшко А.Д., Соловьёв С.И. Сходимость метода Бубнова–Галеркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27, № 7. – С. 1144–1153.

11. Соловьёв С.И. Метод Бубнова–Галеркина для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Математическое моделирование и вычислительный эксперимент (Казань, июнь, 1991 года). – Москва: Институт математического моделирования РАН, 1991. – С. 43.

12. Соловьёв С.И. Быстрый прямой метод решения эрмитовых схем МКЭ четвертого порядка для уравнения Пуассона // Исследования по прикладной математике / Ред. В.С. Мокейчев. – Казань: Казанский государственный университет, 1992. – Вып. 20. – С. 121–130.

13. Соловьёв С.И. Погрешность метода Бубнова–Галеркина с возмущениями для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1992. – Т. 32, № 5. – С. 675–691.

14. Соловьёв С.И. Аппроксимация симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 10. – С. 60–68.

15. Соловьёв С.И. Оценки погрешности метода конечных элементов для симметричных спектральных задач с нелинейным вхождением параметра // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 9. – С. 70–77.

16. Dautov R.Z., Lyashko A.D., Solov′ëv S.I. The bisection method for

symmetric eigenvalue problems with a parameter entering nonlinearly // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1994 – V. 9, № 5. – P. 417–427.

17. Соловьёв С.И. Суперсходимость конечно-элементных аппроксимаций собственных функций // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1230–1238.

18. Соловьёв С.И. Вычисление спектрального радиуса задачи на собственные значения с положительной матрицей, нелинейно зависящей от спектрального параметра // Алгебра и анализ. Часть II. Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 100–летию со дня рождения Н.Г. Чеботарёва (Казань, 5–11 июня 1994 года). – Казань: Казанский государственный университет, 1994. – С. 120–121.

19. Соловьёв С.И. Исследование погрешности МКЭ для нелинейных спектральных задач // Алгебра и анализ. Часть II. Тезисы докладов международной научной конференции, посвященной 100–летию со дня рождения Н.Г. Чеботарёва (Казань, 5–11 июня 1994 года). – Казань: Казанский государственный университет, 1994. – С. 121–122.

20. Solov′ëv S.I. The finite element method for symmetric eigenvalue problems with a nonlinearly entering spectral parameter // Optimization of Finite Element Approximations. Abstracts of reports of the International Conference (St.-Petersburg, June 25–29, 1995). – St.-Petersburg: St.-Petersburg State University, 1995. – P. 87.

21. Соловьёв С.И. Суперсходимость метода конечных элементов с численным интегрированием для задач на собственные значения // Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач. Материалы Всероссийского семинара (Казань, 24–28 июня 1996 года). – Казань: Казанский фонд "Математика", 1996. – С. 91–93.

22. Соловьёв С.И. Метод конечных элементов для симметричных задач на собственные значения с нелинейным вхождением спектрального параметра // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37, № 11. – С. 1311–1318.

23. Соловьёв С.И. Аппроксимация симметричных нелинейных задач на собственные значения в гильбертовом пространстве // Алгебра и анализ. Тезисы докладов школы-конференции, посвященной 100–летию со дня рождения Б.М. Гагаева (Казань, 16–22 июня 1997 года). – Казань: Казанское математическое общество, 1997. – С. 202–203.

24. Жигалко Ю.П., Соловьёв С.И. Аппроксимация задачи о собственных колебаниях балки с гармоническим осциллятором // Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач. Материалы Второго Всероссийского семинара (Казань, 18–21 сентября 1998 года). – Казань: Казанское математическое общество, 1998. – С. 35–37.

25. Solov′ëv S.I. Convergence of the modified subspace iteration method for nonlinear eigenvalue problems. – Preprint SFB393/99–35 – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 1999. – 15 p.

26. Solov′ëv S.I. Preconditioned gradient iterative methods for nonlinear eigenvalue problems. – Preprint SFB393/00–28 – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2000. – 17 p.

27. Карчевский Е.М., Соловьёв С.И. Исследование спектральной задачи для оператора Гельмгольца на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 4. – С. 563–565.

28. Карчевский Е.М., Носич А.И., Соловьёв С.И. Собственные моды диэлектрических волноводов с размытой границей // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского / Задачи дифракции и сопряжение электромагнитных полей в волноводных структурах. Материалы Молодежной научной школы-конференции (Казань, Юдино, 19–22 октября 2000 года). Казань: НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, 2000. – Т. 6. – С. 79–114.

29. Соловьёв С.И. Блочные итерационные методы для нелинейных спектральных задач // Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач. Материалы Третьего Всероссийского семинара (Казань, 18–21 сентября 2000 года). – Казань: Казанское математи-

ческое общество, 2000. – С. 106–108.

30. Соловьёв С.И. Конечноэлементная аппроксимация нелинейной задачи на собственные значения для интегрального уравнения // Теория сеточных методов для нелинейных краевых задач. Материалы Третьего Всероссийского семинара (Казань, 18–21 сентября 2000 года). – Казань: Казанское математическое общество, 2000. – С. 108–111.

31. Apel Th., Sändig A.–M., Solov′ëv S.I. Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes. – Preprint SFB393/01–33 – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2001. – 32 p.

32. Жигалко Ю.П., Соловьёв С.И. Собственные колебания балки с гармоническим осциллятором // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 10. – С. 36–38.

33. Соловьёв С.И. Итерационные методы решения нелинейных спектральных задач // Компьютерное и математическое моделирование в естественных и технических науках. Третья Всероссийская научная internet-конференция (Тамбов, сентябрь–ноябрь 2001 года). – Тамбов: Тамбовский государственный университет, 2001. – Вып. 13. – С. 36–37.

34. Apel Th., Sändig A.–M., Solov′ëv S.I. Computation of 3D vertex singularities for linear elasticity: Error estimates for a finite element method on graded meshes // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2002. – V. 36, № 6. – P. 1043–1070.

35. Соловьёв С.И. Суперсходимость конечно-элементных аппроксимаций собственных подпространств // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, № 5. – С. 710–711.

36. Карчевский Е.М., Соловьёв С.И. Существование собственных значений спектральной задачи теории диэлектрических волноводов // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 3. – С. 78–80.

37. Solov′ëv S.I. Existence of the guided modes of an optical fiber.

– Preprint SFB393/03–02 – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2003. – 21 p.

38. Solov′ëv S.I. Eigenvibrations of a plate with elastically attached load. – Preprint SFB393/03–06 – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2003. – 18 p.

39. Solov′ëv S.I. Preconditioned iterative methods for monotone nonlinear eigenvalue problems – Preprint SFB393/03–08. – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2003. – 22 p.

40. Solov′ëv S.I. Vibrations of plates with masses. – Preprint SFB393/03–18. – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2003. – 7 p.

41. Solov′ëv S.I. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems – Preprint SFB393/03–19. – Chemnitz: Technische Universität Chemnitz, 2003. – 18 p.

42. Solov′ëv S.I. Preconditioned iterative methods for nonlinear eigenvalue problems // Abstracts. Einführungstagung Chemnitz (Chemnitz, November 20–21, 2003). – Bonn: Alexander von Humboldt–Stiftung, 2003. – P. 46.

43. Соловьёв С.И. Собственные колебания пластины с массами // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского / Теория функций, её приложения и смежные вопросы. Материалы Седьмой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 27 июня–4 июля 2005 года). Казань: Казанское математическое общество, 2005. – Т. 30. – С. 145–146.

44. Соловьёв С.И. Аппроксимация собственных колебаний пластины при точечном закреплении // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Шестого Всероссийского семинара (Казань, 1–4 октября 2005 года). – Казань: Казанский государственный университет, 2005. – С. 200–201.

45. Соловьёв С.И. Итерации подпространства для нелинейных спектральных задач // Сеточные методы для краевых задач и при-

ложения. Материалы Шестого Всероссийского семинара (Казань, 1–4 октября 2005 года). – Казань: Казанский государственный университет, 2005. – С. 201–203.

46. Соловьёв С.И. Приближенные методы для спектральных задач с рациональной зависимостью от параметра // Исследования по прикладной математике и информатике / Ред. И.Б. Бадриев. – Казань: Казанское математическое общество, 2006. – Вып. 26. – С. 91–95.

47. Соловьёв С.И. Метод Бубнова–Галеркина с возмущениями для спектральных задач // Исследования по прикладной математике и информатике / Ред. И.Б. Бадриев. – Казань: Казанское математическое общество, 2006. – Вып. 26. – С. 95–100.

48. Соловьёв С.И. Метод конечных элементов для несамосопряжённых спектральных задач // Учёные записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки – 2006. – Т. 148, № 4. – С. 51–62.

49. Solov′ëv S.I. Preconditioned iterative methods for a class of nonlinear eigenvalue problems // Linear Algebra and its Applications. – 2006. – V. 41, № 1. – P. 210–229.

50. Соловьёв С.И. Аппроксимация спектра компактного оператора // Сеточные методы для краевых задач и приложения. Материалы Седьмого Всероссийского семинара (Казань, 21–24 сентября 2007 года). – Казань: Казанский государственный университет, 2007. – С. 253–256.